Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

15/11/2016.

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx_i}(\bar{x}) = \frac{d}{dx_i}\sqrt{\underbrace{x_1^2+\dots+x_{i-1}^2}_{C_1} + x_i^2 + \underbrace{x_{i+1}^2+\dots+x_n^2}_{C_2}} = \frac{1}{2}\frac{2x_i}{\sqrt{\dots}} = \frac{x_i}{\|\bar{x}\|},$$

$\bar{x} \neq \bar{0} \ (\Longleftrightarrow \|\bar{x}\| \neq 0) \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \exists \frac{df}{dx_i} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, n$, $\frac{df}{dx_i}(\bar{x}) = \frac{x_i}{\|\bar{x}\|}$ είναι συνεχής,

αφού οι συναρτήσεις $\bar{x} \mapsto x_i$, $\bar{x} \to \|\bar{x}\|$ είναι συνεχείς.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό $\bar{x} \in U$

Αν η f είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ $\left(\Longleftrightarrow \exists \frac{df}{dx_i}(\bar{x}) \in \mathbb{R} \ \ \forall i = 1, 2, \dots, n\right)$

τότε το διάνυσμα $\left(\frac{df}{dx_1}(\bar{x}), \dots, \frac{df}{dx_n}(\bar{x})\right) =: \text{grad } f(\bar{x})$

[Όπου το σύμβολο "∇" ονομάζεται "ανάδελτα" $=: \nabla f(\bar{x})$ (nabla)]

ονομάζεται κλίση της f στο $\bar{x}$ (βάθμωση / gradient)

---*---*---*---*---*---*---

<u>Ορισμός</u>: Μια συνάρτηση $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, ονομάζεται συνεχώς (μερικώς) διαφορίσιμη, αν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{df}{dx_i}(\bar{x}) \ (\in \mathbb{R})$ $\forall i = 1, \dots, n$, $\forall \bar{x} \in U$ και οι συναρτήσεις $\frac{df}{dx_i} : U \to \mathbb{R}$ με $i = 1, \dots, n$ είναι συνεχείς, συμβολικά $f \in C^1(U)$

! <u>Προσοχή</u>! Σε αυτούς τους ορισμούς και στους επόμενους, καθώς και σε όλες τις προτάσεις - Θεωρήματα, θα έχουμε πάντα ένα $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό ($\Leftarrow$ έτσι ώστε κάθε σημείο του U να είναι σ.σ.).

Μπορούμε όμως να χρησιμοποιούμε τους ορισμούς και τις προτάσεις και για τους περιορισμούς $f|_V : V \to \mathbb{R}$, $V \subset U \ (\subset \mathbb{R}^n)$, όπου V ανοικτό, ακόμα και εάν η $f: U \to \mathbb{R}$ είτε δεν έχει μια ιδιότητα σε όλο το πεδίο ορισμού της είτε αυτό δεν είναι ανοικτό.

(π.χ) Η $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, είναι C^1 στο $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ (δηλ. $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\} \to \mathbb{R}$

$f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$, είναι συνεχώς (μερικώς) διαφορίσιμη, δηλαδή

$\exists \frac{df}{dx_i}(\bar{x}) = \frac{x_i}{\|\bar{x}\|}$, $\forall i = 1, \dots, n$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$

Πρόταση: Έστω $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, διαφορίσιμη και $f(\bar{x})=h(\|\bar{x}\|)$, $\bar{x}\neq\bar{0}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx_i}(\bar{x})=\frac{df}{dx_i}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)\overset{\text{ορισμός}}{=}\frac{d}{dx}h(g(x_1)),$$

όπου $g(x)=\sqrt{x_1^2+\dots+x_{i-1}^2+x_i^2+x_{i+1}^2+\dots+x_n^2}$ =

γράφεται αλλιώς

$$\frac{d}{dx}(h(g(x)))\Big|_{x=x_1} = (h\circ g)'(x)$$

ΑΠΕΙΙ $\underbrace{h'(g(x))}_{=\|\bar{x}\|}\cdot \underbrace{g'(x)}_{=\frac{x_i}{\|\bar{x}\|}} = h'(\|\bar{x}\|)\frac{x_i}{\|\bar{x}\|}$

Παραλλαγή: Έστω ότι με ενδιαφέρει τι συμβαίνει για $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ με $\|\bar{x}\|>R$, όπου $R=10^{10}$, τότε προφανώς αρκεί για να εφαρμόσω την προηγούμενη πρόταση να έχω

(πχ) h διαφορίσιμη στο $(R-1,\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ: Εξετάστε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Λύση: Συνέχεια: Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων) αλλά δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, αφού

πχ. $f\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right)=\frac{1}{2}\xrightarrow[\nu\to\infty]{}\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$

Μερική διαφορισιμότητα: Στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ έχουμε

$$\frac{df}{dx}(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-xy\,2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{df}{dy}(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Στο $(0,0)$ $\frac{df}{dx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\overbrace{0+h,0}^{(h,0)})-\overbrace{f(0,0)}^{0}}{h}=0$

$\frac{df}{dy}(0,0)=\dots\dots=0$ (με τον ίδιο τρόπο)

$\Rightarrow$ η f είναι μερικώς διαφορίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}^2$ και η κλίση της στο $(0,0)$ είναι $\nabla f(0,0)=(0,0)$

$\Rightarrow$ ΠΡΟΣΟΧΗ Δηλαδή η f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο αλλά να έχει μερικές παραγώγους.

① **Ορισμός**: Μια διανυσματική συνάρτηση $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, θα λέγεται μερικώς διαφορίσιμη ως προς την i-οστή μεταβλητή x_i στο σημείο $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\left[\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \right]$$

αν όλες οι συνιστώσες της $\bar{f}$, δηλ όλες οι $f_i : U \to \mathbb{R}$ είναι μερικώς διαφ. ως προς i-οστή μεταβλητή στο $\bar{x}$.

δηλαδή $\exists \frac{df_i}{dx_i}(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, $\forall j = 1, \dots, m$

② Άρα μια $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ λέγεται μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, αν

$$\exists \frac{df_j}{dx_i}(\bar{x}) \in \mathbb{R} \quad \forall j = 1, \dots, m \quad \forall i = 1, \dots, n$$

③ Η f λέγεται μερικώς διαφορίσιμη (στο U) αν

$$\exists \frac{df_j}{dx_i}(\bar{x}) \in \mathbb{R} \quad \forall j = 1, \dots, m \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall \bar{x} \in U$$

④ Η $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ λέγεται συνεχώς (μερικώς) διαφορίσιμη αν είναι μερικώς διαφορίσιμη (δηλ $\exists \frac{df_j}{x_i}: U \to \mathbb{R}$ $\forall j = 1, \dots, m$ $\forall i = 1, \dots, n$) και οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς.

Συμβολισμός: $\bar{f} \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$

Παρατηρήσεις

(α) Αν $m = 1$, προκύπτουν οι αντίστοιχοι ορισμοί για πραγματικές συναρτήσεις.

(β) Αν οι αντίστοιχες ιδιότητες ισχύουν $\forall$ συνιστώσα f_j, $j = 1, \dots, m$, τότε θα ισχύουν και για την $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$

Ορισμός : Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x} \in U$

$\bar{f} = (f_1, \dots, f_m)$ [Προσοχή! : όπως και να γράφουμε την $\bar{f}$, εννοούμε τις τιμές της ως διάνυσμα στήλη, δηλαδή $\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$]

Αν η $\bar{f}$ είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ τότε ο πίνακας,

$$J_{\bar{g}(\bar{x})} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{df_1}{dx_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & \\ \frac{df_m}{dx_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{df_m}{dx_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

ονομάζεται Ιακωβιανός Πίνακας της $\bar{f}$ στο $\bar{x}$.

Προσοχή! Κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μια συνιστώσα f_j, $j = 1, 2, \dots, m$. (δηλαδή έχουμε m γραμμές και n στήλες)

Δηλαδή $J_{\bar{f}}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και στοιχεία στο $\mathbb{R}$.

(α) $$J_{\bar{f}}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

(β) για $m = 1$, $J_f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

Άλγεβρα Ιακωβιανών Πινάκων

Έστω $\bar f, \bar g : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar x \in U$ μερικώς διαφορίσιμες στο $\bar x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\bar f + \bar g : U \to \mathbb{R}^m$, $a \cdot \bar f : U \to \mathbb{R}^m$ $(a \in \mathbb{R})$

$\phi \bar f : U \to \mathbb{R}^m$, $\phi : U \to \mathbb{R}$, ϕ μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar x$,

$\bar f \cdot \bar g : U \to \mathbb{R}$ μερικώς διαφορίσιμες στο $\bar x$, και ισχύουν:

(α) $J_{\bar f + \bar g}(\bar x) = J_{\bar f}(\bar x) + J_{\bar g}(\bar x)$

ανάστροφος

(β) $\nabla(\bar f \cdot \bar g)(\bar x) = \bar f(\bar x)^T J_{\bar g}(\bar x) + \bar g(\bar x)^T J_{\bar f}(\bar x)$

(γ) $J_{\phi \bar f}(\bar x) = \phi(\bar x) J_{\bar f}(\bar x) + \bar f(\bar x) \nabla \phi(\bar x)$ (, όπου $\bar f(\bar x) = \begin{pmatrix} f_1(\bar x) \\ \vdots \\ f_m(\bar x) \end{pmatrix}$ και

$$\nabla \phi(\bar x) = \frac{d\phi_1(\bar x)}{dx_1}, \dots, \frac{d\phi_n(\bar x)}{dx_n} \Big)$$

***** Ασκήσεις:** (1) Να δείξετε τα (α), (β), (γ)

(2) Εξετάστε ως προς τη συνέχεια και τη μερική διαφορισιμότητα την

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}{\|(x_1, \dots, x_n)\|^n}, & \bar x \neq \bar 0 \\ 0, & \bar x = \bar 0 \end{cases}$$

(3) Εξετάστε ως προς την συνέχεια και τη μερική διαφορισιμότητα (εννοείται: βρείτε μερικές παραγώγους της Α.43)

Απόδειξη του (β): $\nabla(\bar f \cdot \bar g)(\bar x) = \text{grad} \sum_{j=1}^{m} (f_j g_j)(\bar x) =$

$$= \left(\frac{d}{dx_1}, \dots, \frac{d}{dx_n}\right) \sum_{j=1}^{m} (f_j g_j)(\bar x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\underbrace{\frac{d(f_j g_j)(\bar x)}{dx_1}}_{\left(\frac{df_j}{dx_1}(\bar x)\right) g_j(\bar x) + f_j(\bar x) \frac{dg_j}{dx_1}(\bar x)}, \dots, \frac{d(f_j g_j)(\bar x)}{dx_n} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \underset{\in \mathbb{R}}{f_j(\bar x)} \underset{\in \mathbb{R}^{1\times n}}{\nabla g_j(\bar x)} + \underset{\in \mathbb{R}}{g_j(\bar x)} \underset{\in \mathbb{R}^{1\times n}}{\nabla f_j(\bar x)} =$$

$$= \underbrace{(f_1(\bar x), \dots, f_m(\bar x))}_{\bar f(\bar x)^T \text{ (ανάστροφος)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dg_1}{dx_1}(\bar x) & \dots & \frac{dg_1}{dx_n}(\bar x) \\ \vdots & & \\ \frac{dg_m}{dx_1}(\bar x) & \dots & \frac{dg_m}{dx_n}(\bar x) \end{pmatrix}}_{\to J_{\bar g}(\bar x)} + \text{(ανάλογα)} \dots$$

Ορισμός: Η $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, λέγεται διαφορίσιμη στο U αν υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $D: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε:

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = 0$$

Ερώτηση: Τι συμβαίνει για συναρτήσεις όπου $n=m=1$;;;